

Modelación numérica del concreto simple con elementos finitos mediante la teoría de la plasticidad y la función de fluencia de Hu y Schnobrich

Numerical modeling of the simple concrete with finite elements by means of the plasticity theory and yielding function of Hu and Schnobrich

Luis Rodríguez*, Dorian Linero^{1*}

* Universidad Nacional de Colombia. COLOMBIA

Fecha de Recepción: 13/03/2012

Fecha de Aceptación: 30/06/2012

PAG 129 - 144

Resumen

Este artículo describe la formulación, implementación y validación de un modelo constitutivo en el método de los elementos finitos, que represente el comportamiento mecánico del concreto simple sometido principalmente a compresión, considerando estado plano de esfuerzos y deformaciones infinitesimales. Este modelo se basa en la formulación general de la teoría de la plasticidad (Simó & Hughes 1998), considerando una regla de flujo no asociado, donde el potencial plástico está definido por el criterio de fallo de von Mises y la función de fluencia corresponde a aproximaciones empíricas realizadas por Hu y Schnobrich (1989). Se formuló un algoritmo implícito de integración numérica para resolver el problema no lineal dado por el modelo constitutivo del material. El modelo constitutivo presentado en este artículo se implementó en el programa de análisis no lineal con elementos finitos a código abierto HYPLAS (de Souza Neto et al. 2008) y el postproceso se realizó con el programa GiD (CIMNE 2008). Finalmente se presenta la comparación de la respuesta estructural de los paneles sometidos a fuerzas contenidas en su plano ensayados experimentalmente por Kupfer y otros (1969), contra la simulación numérica utilizando el modelo propuesto. También se presenta un ejemplo de la aplicación del modelo propuesto a la simulación de vigas sometidas a flexión.

Palabras Clave: Modelos constitutivos de plasticidad, mecánica computacional, método de los elementos finitos, concreto simple.

Abstract

This article describes the formulation, implementation and validation of a constitutive model in the finite element method, which it represents the mechanical behavior of plain concrete subjected mainly to compression, considering the plane stress state and infinitesimal strain. This model is based on the general formulation of the theory of plasticity (Simó & Hughes 1998), considering a non-associated flow rule, where the plastic potential is defined by the failure criterion and von Mises and yield function corresponds to empirical approaches developed by Hu and Schnobrich (1989). An implicit algorithm of numerical integration was formulated to solve the nonlinear problem given by the material constitutive model. The constitutive model presented in this paper was implemented in the nonlinear analysis finite element program with open source HYPLAS (de Souza Neto et al. 2008) and the post-process was performed using GiD (CIMNE 2008). Finally we present the comparison of the structural response of panels subjected to forces contained in its plane tested experimentally by Kupfer and others (1969), against the numerical simulation using the proposed model. Also an application example of the proposed model to the beams simulation subjected to bending was presented.

Keywords: Plasticity constitutive models, computational mechanics, finite elements method, simple concrete

1. Introducción

La teoría de la plasticidad clásica fue formulada inicialmente para metales, cuyo comportamiento es diferente al del concreto. Sin embargo, desde un punto de vista macroscópico, los metales y el concreto poseen características similares especialmente en el rango previo al colapso, que motivan a representar a dicho material mediante la teoría de la plasticidad. Por ejemplo, el concreto exhibe un comportamiento no lineal durante el proceso de carga, presenta una deformación irreversible después de retirada la carga y muestra un comportamiento de naturaleza dúctil en el rango de compresión triaxial o biaxial (Chen & Han 2007).

1. Introduction

The classic plasticity theory was initially formulated for metals, which behavior is quite different from concrete's behavior. However, from a microscopic point of view, metals and concrete have similar characteristics, especially in the range previous to yielding, which lead us to represent such materials by means of the plasticity theory. For instance, concrete has a non-linear behavior during loading process and undergoes an irreversible strain after removing load and; it has a ductile behavior in the range of three-axial or biaxial compression (Chen & Han 2007).

¹ Autor de correspondencia / Corresponding author:
E-mail: dllineros@unal.edu.co



Existe una gran variedad de modelos constitutivos basados en la teoría de la plasticidad que intentan representar el comportamiento mecánico de los materiales y en particular del concreto, los cuales en su mayoría establecen una función de fluencia, una regla de flujo y una ley de endurecimiento o ablandamiento (Babu et al., 2005, de Souza Neto et al., 2008, Simó & Hughes 1998).

La función de fluencia integrada al modelo de plasticidad puede surgir de los criterios de fallo clásicos como el criterio de Tresca, von Mises, Rankine, Mohr-Coulomb y Drucker-Prager (de Souza Neto et al. 2008, Linero & Garzón-Alvarado 2010), o de los criterios desarrollados específicamente para el concreto como los propuestos por Ottosen (1977), Willam y Warnke (1974), Menetrey y Willam (1995), Hsieh y colaboradores (1982), y Hu y Schnobrich (1989), entre otros.

La regla de flujo define la dirección de la tasa de la deformación plástica de acuerdo con la variación del potencial plástico G con respecto al tensor de esfuerzos. Si el potencial plástico escogido es igual a la función de fluencia la regla de flujo se denomina asociada, en cambio, si G corresponde a una función diferente se tiene una regla de flujo no asociada. Comúnmente la función del potencial plástico con reglas de flujo no asociadas se definen a partir de los criterios de fallo clásicos como von Mises y Drucker-Prager.

Algunos de los modelos constitutivos de plasticidad específicos para el concreto desarrollados en las últimas décadas son los siguientes. El modelo de Han y Chen (1987), utiliza la función de fluencia de cinco parámetros de William y Warnke (1974) y una regla de flujo no asociada. Ohtami y Chen (1988) usaron la función de fluencia de Chen y Chen (1975) y una regla de flujo asociada. Oñate y colaboradores (1988), modificaron el criterio de Mohr-Coulomb para usarla como función de fluencia y utilizaron una regla de flujo no asociada. Fenestra y de Borst (1996) desarrollaron un modelo basado en el criterio de fluencia de Drucker-Prager y con una regla de flujo no asociativa aplicable a un material compuesto conformado por una matriz de concreto y barras de acero. Imran y Pantazopoulou (Imran & Pantazopoulou 2001) utilizaron el criterio de cuatro parámetros de Hsieh-Ting-Chen (Hsieh et al., 1982) y una regla de flujo no asociada. El modelo de Grassl y otros (2002) usa la función de fluencia de Menetrey y Willam (1995), combinada con una regla de flujo no asociada.

El objetivo general de este trabajo es representar el comportamiento de estructuras de concreto simple mediante el método de los elementos finitos para problemas no lineales, cuyo modelo constitutivo de plasticidad no asociada (de Souza Neto et al., 2008, Simó & Hughes 1998), utiliza la función de fluencia de Hu y Schnobrich (1989) y la función de potencial plástico de von Mises.

2. Formulación del modelo constitutivo

A continuación se indican brevemente los elementos del modelo constitutivo propuesto, incluyendo la función de fluencia, la regla de flujo, la ley de endurecimiento y la ecuación constitutiva tangente.

El tensor de deformación ε y su tasa $\dot{\varepsilon}$ se pueden descomponer en dos partes: deformación elástica ε^e y deformación plástica ε^p , de tal forma que:

There is a wide variety of constitutive models based on the plasticity theory, which intends to represent materials mechanic behavior - particularly concrete - most of them establish a yielding function and a hardening or softening flow law. (Babu et al., 2005, De Souza Neto et al., 2008, Simó & Hughes 1998).

The yielding function, part of the plasticity model, may come up from classic yielding criteria, such us criteria developed by Tresca, von Mises, Rankine, Mohr-Coulomb & Drucker-Prager (de Souza Neto et al. 2008, Linero & Garzón-Alvarado 2010), as well as from criteria especially developed for concrete, such as the ones proposed by Ottosen (1977), Willam and Warnke (1974), Menetrey and Willam (1995), Hsieh and coworkers (1982), Hu and Schnobrich (1989), among others.

The flow rule defines the course of plastic strain rate in accordance with plastic potential variation G , in regards to tensile stress. If the chosen plastic potential is equal to yielding function, the flow rule will be denominated as associated. Contrarily, if G corresponds to a different function, a non-associate flow rule will be obtained. Generally the plastic potential function having non-associated flow rules are defined from classic failure criteria, such as developed by von Mises and Drucker-Prager.

Some specific plasticity constitutive models developed over the last decades for concrete are the following: The Han and Chen (1987) model, which employs the William and Warnke (1974) five parameters yielding function and a non-associated flow rule. Ohtami and Chen (1988) employed Chen and Chen (1975) yielding function and an associated flow rule. Oñate and coworkers modified Mohr-Coulomb criterion to be used as yielding function together with a non-associated flow rule. Fenestra and de Borst (1996) developed a model based on the yielding criterion by Drucker-Prager and non associative flow rule applicable on a composed material made up by a concrete matrix and steel bars. Imran and Pantazopoulou (Imran & Pantazopoulou 2001) employed Hsieh-Ting-Chen (Hsieh et al. 1982) four parameter criteria and a non-associated flow rule. The Grassl and others (2002) model employs the Menetrey and Willam (1995) yielding function, which is combined with a non-associated flow rule.

The overall objective of this research is to represent the behavior of simple concrete structures by means of a finite element method for non-linear problems, which non-associated constitutive model (de Souza Neto et al., 2008, Simó & Hughes 1998) employs the Hu and Schnobrich (1989) yielding function and the plastic potential function by von Mises.

2. Formulation of constitutive model

The elements of the proposed constitutive model, including yielding function, flow rule, hardening law and tangent constitutive equation are briefly described below.

Strain tensor ε and its rate $\dot{\varepsilon}$ can be split into two parts: elastic strain ε^e and plastic strain ε^p , so that:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (1)$$

Sea una función de potencial plástico de la forma:

It becomes a plastic potential function, as:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}) = G(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma} = 0 \quad (2)$$

La tasa de la deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ está definida por la regla de flujo en términos de la variación de un potencial plástico $g(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma})$ con respecto al tensor de esfuerzos de la forma:

Plastic strain rate $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ is defined by the flow rule in terms of a potential plastic variation $g(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma})$ in regards to stress tensor, such as:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3)$$

Siendo $\gamma = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ el multiplicador plástico o la tasa de la deformación plástica equivalente. Este multiplicador es positivo ($\gamma > 0$) debido al carácter irreversible de la deformación plástica.

Thus being $\gamma = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ the plastic multiplier or the equivalent plastic strain rate. Such multiplier is positive ($\gamma > 0$) due to the irreversible nature of plastic strain.

La función de fluencia $f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p)$ establece cuando un estado de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ en un instante de la historia de carga asociado con $\bar{\varepsilon}^p$ es elástico. Es decir, un estado de carga o descarga elástica se presenta si $f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) < 0$ y un estado de carga plástica ocurre cuando $f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = 0$. Dicha función está dada como la diferencia entre dos funciones escalares, la primera $F(\boldsymbol{\sigma})$ determinada por el criterio de fallo material en función del estado de esfuerzos y la segunda $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p)$ correspondiente a un esfuerzo uniaxial equivalente que depende de la historia de carga y de la ley de endurecimiento o ablandamiento del material en términos de la deformación plástica equivalente, así:

Yielding function $f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p)$ is established when a elastic stress status $\boldsymbol{\sigma}$ is associated with $\bar{\varepsilon}^p$ at an instant during loading process. In other words, an elastic loading or unloading status takes place if $f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) < 0$ and a plastic loading status takes place when $f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = 0$. Such function is given as the difference between two scale functions; the first $F(\boldsymbol{\sigma})$ is determined by the material yielding criterion in function of stress status and; the second $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p)$ corresponds to an equivalent uniaxial stress, which depends on loading history and material hardening or softening law in terms of equivalent plastic strain, so that:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = F(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p) \leq 0 \quad (4)$$

En particular, el modelo presentado utiliza una función de fluencia definida por Hu y Schnobrich (Hu & Schnobrich 1989), a partir de la experimentación en paneles de concreto simple, para estados planos de esfuerzos. En dicho trabajo se establecen comportamientos diferentes para los estados de esfuerzos principales de tracción biaxial ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$), compresión biaxial ($\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$) y tracción - compresión ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$).

Particularly, this model employs the yielding function defined by Hu and Schnobrich (Hu & Schnobrich 1989), from an experiment on simple concrete panels, for plain stress status. Such study establishes different behaviors for main biaxial tensile stress status ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$), biaxial compressive stress ($\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$) and tensile - compressive stress ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$).

Para un estado de tracción biaxial, es decir si $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_2 > 0$, la función de fluencia $f = F - \bar{\sigma} \leq 0$ está conformada por las funciones:

For a biaxial tensile status, that is to say if $\sigma_1 > 0$ and $\sigma_2 > 0$, the yielding function $f = F - \bar{\sigma} \leq 0$ is made up by functions:

$$F = c_1 \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{(1+\alpha)}{\alpha} \tau_{oct} + \frac{3}{2} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \sigma_m \right), \quad \bar{\sigma} = \sigma_{yc} \quad (5)$$

$$c_1 = 1 - 0.4019 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) + 0.008913 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2$$

El esfuerzo medio, el esfuerzo octaédrico y la relación de resistencias a tracción y compresión corresponden a:

The average stress, the octahedral stress and the relation of tensile and compressive strengths correspond to:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}, \quad \alpha = \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_{yc}} \quad (6)$$



Se observa que el esfuerzo uniaxial equivalente es igual al esfuerzo máximo a compresión del material σ_{yc} y por lo tanto no evoluciona con respecto a la deformación plástica equivalente.

Para un estado de esfuerzos denominado tracción – compresión, en el cual $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_2 < 0$, la función de fluencia $f = F - \bar{\sigma}$ es igual a:

$$f = F - \bar{\sigma} = c_2 \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{(1+\alpha)}{\alpha} \tau_{oct} + \frac{3}{2} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \sigma_m \right) - \bar{\sigma} \leq 0$$

$$c_2 = \begin{cases} 1 - 0.02886 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) - 0.006657 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 - 0.0002443 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^3 & \text{si } \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < -0.103 \\ 1 + 6.339 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) + 68.82 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 + 183.8 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^3 & \text{si } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \geq -0.103 \end{cases} \quad (7)$$

El esfuerzo uniaxial equivalente $\bar{\sigma}$ es definido más adelante con las expresiones (10) y (11), en función de la deformación uniaxial equivalente.

Para un estado de esfuerzos de compresión biaxial, en el cual los esfuerzos principales son $\sigma_1 < 0$ y $\sigma_2 < 0$, se considera ablandamiento del material durante la etapa de plástica, de tal forma que la función de fluencia $f = F - \bar{\sigma}$ es igual a:

$$f = F - \bar{\sigma} = c_3 \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{(2\beta-1)}{\beta} \tau_{oct} + 3 \frac{(\beta-1)}{\beta} \sigma_m \right) - \bar{\sigma} \leq 0$$

$$c_3 = 1 - 0.05848 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) - 0.05848 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 \quad \beta = 1.16 \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad (8)$$

La función de fluencia de Hu y Schnobrich determina la evolución de la superficie de fluencia durante el comportamiento inelástico del material, a través de una función no lineal uniaxial equivalente del esfuerzo $\bar{\sigma}$ y la deformación $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^e + \bar{\epsilon}^p$. Considerando iguales al módulo de elasticidad inicial y al módulo de elasticidad secante cuando $\bar{\sigma} = \sigma_{yc}$ se tiene la siguiente expresión del esfuerzo uniaxial equivalente en compresión:

$$\bar{\sigma} = \frac{E_0 \bar{\epsilon}}{1 + (R-1) \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right) - (2R-1) \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right)^2 + R \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right)^3} \quad (9)$$

$$R = \frac{(R_\sigma - 1)}{(R_\epsilon - 1)^2} - \frac{1}{R_\epsilon}, \quad R_\sigma = \frac{\sigma_{yc}}{\bar{\sigma}_f}, \quad R_\epsilon = \frac{\bar{\epsilon}_f}{\bar{\epsilon}_0}, \quad E_0 = \frac{\sigma_{yc}}{\bar{\epsilon}_0}$$

Siendo $\bar{\sigma}_f$ y $\bar{\epsilon}_f$ el esfuerzo y la deformación al final de la rama de ablandamiento de la curva entre el esfuerzo y la deformación uniaxial equivalente del material $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$. Dada la dificultad en la obtención de estos parámetros del material experimentalmente, se supone que $R_\sigma = R_\epsilon = 4$, como lo propone Elwi y Murray (1979). La expresión del esfuerzo uniaxial equivalente en compresión se reduce a:

We can observe that the equivalent uniaxial stress is equal to the material maximum compressive stress σ_{yc} and, therefore, it does not evolve in regards to the equivalent plastic strain.

For a tensile-compressive stress status, where $\sigma_1 > 0$ and $\sigma_2 < 0$, the yielding function $f = F - \bar{\sigma}$ is equal to:

The equivalent uniaxial stress $\bar{\sigma}$ is defined further on with the expressions (10) and (11), in terms of equivalent uniaxial strain.

For a biaxial compressive stress status, where the principal stresses are $\sigma_1 < 0$ and $\sigma_2 < 0$, the material softening is considered during the plastic stage, so that the yielding function $f = F - \bar{\sigma}$ will be equal to:

The yielding function by Hu and Schnobrich determines the evolution of yielding surface during the inelastic material behavior, by means of a equivalent uniaxial non-linear function of the stress $\bar{\sigma}$ and the strain $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^e + \bar{\epsilon}^p$. By considering the initial elasticity modulus and the secant elasticity modulus as equals at $\bar{\sigma} = \sigma_{yc}$ the following expression for compressive equivalent uniaxial stress is obtained:

Being $\bar{\sigma}_f$ y $\bar{\epsilon}_f$ the stress and the strain at the end of softening branch of curve between the equivalent uniaxial stress and strain $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$. Provided the difficulty of experimentally obtaining such material parameters, it is supposed that $R_\sigma = R_\epsilon = 4$ as proposed by Elwi and Murray (1979). The compression equivalent uniaxial stress expression is reduced to:

$$\bar{\sigma} = \Xi E_0 \bar{\epsilon} \quad \text{donde} \quad \Xi = \left[1 - \frac{11}{12} \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right) + \frac{10}{12} \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right)^3 \right]^{-1} \quad (10)$$

Como lo ilustra la **Figura 1(a)**, la curva $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$ no es exactamente lineal antes de alcanzar el esfuerzo máximo a compresión σ_{yc} . Sin embargo, en el modelo implementado se ha considerado una relación lineal explícita en este rango, de tal forma que:

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{\epsilon} \leq \bar{\epsilon}_0 \\ \Xi E_0 \bar{\epsilon} & \text{si } \bar{\epsilon} > \bar{\epsilon}_0 \end{cases} \quad (11)$$

El módulo de elasticidad tangente de la relación entre el esfuerzo y la deformación uniaxial equivalente corresponde a:

$$E_t = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = E_0 \left[12 - 10 \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right)^2 - 2 \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right)^3 \right] \left[1 - 11 \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right) + 10 \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right)^3 \right]^{-1} \quad (12)$$

Por otro lado se considera una relación bilineal entre el esfuerzo y la deformación uniaxial equivalente en tracción, dividida por el esfuerzo máximo a tracción $\sigma_{yt} = \alpha \sigma_{yc}$ como se indica en la **Figura 1(b)**. Hu y Schnobrich proponen que la superficie de fluencia en tracción biaxial no evolucione durante rango inelástico, en consecuencia la pendiente del segundo tramo de la curva es cero, conservando a $\bar{\sigma} = \sigma_{yt}$.

El comportamiento real a tracción del concreto y los modelos de fractura cohesiva, entre otros (Bazant & Oh 1983, Graffe & Linero 2010), muestran una rápida reducción del esfuerzo resistente después de alcanzada el esfuerzo máximo a tracción. Sin embargo, es válida la hipótesis del párrafo anterior cuando se intentan representar estados de esfuerzo donde se impone la compresión.

As depicted in **Figure 1(a)**, the curve $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$ is not exactly linear before reaching the maximum compression stress σ_{yc} . However, the implemented model has considered an explicit linear relationship within this range, so that:

The tangent elasticity modulus of the relationship between the stress and equivalent uniaxial strain corresponds to:

On the other hand a bilinear relationship is considered between the tensile equivalent uniaxial stress and strain, divided by the maximum tensile stress $\sigma_{yt} = \alpha \sigma_{yc}$ as indicated on **Figure 1(b)**. Hu and Schnobrich propose that biaxial tensile yielding surface will not evolve during the inelastic range; consequently the slope in the second interval of the curve will be zero, maintaining $\bar{\sigma} = \sigma_{yt}$.

The actual tensile behavior of concrete and the cohesive fracture models, among others (Bazant & Oh 1983, Graffe & Linero 2010); undergo a quick strength reduction after achieving the maximum tensile stress. However, the hypothesis in above paragraph is valid when it comes to represent stress status where compression prevails.

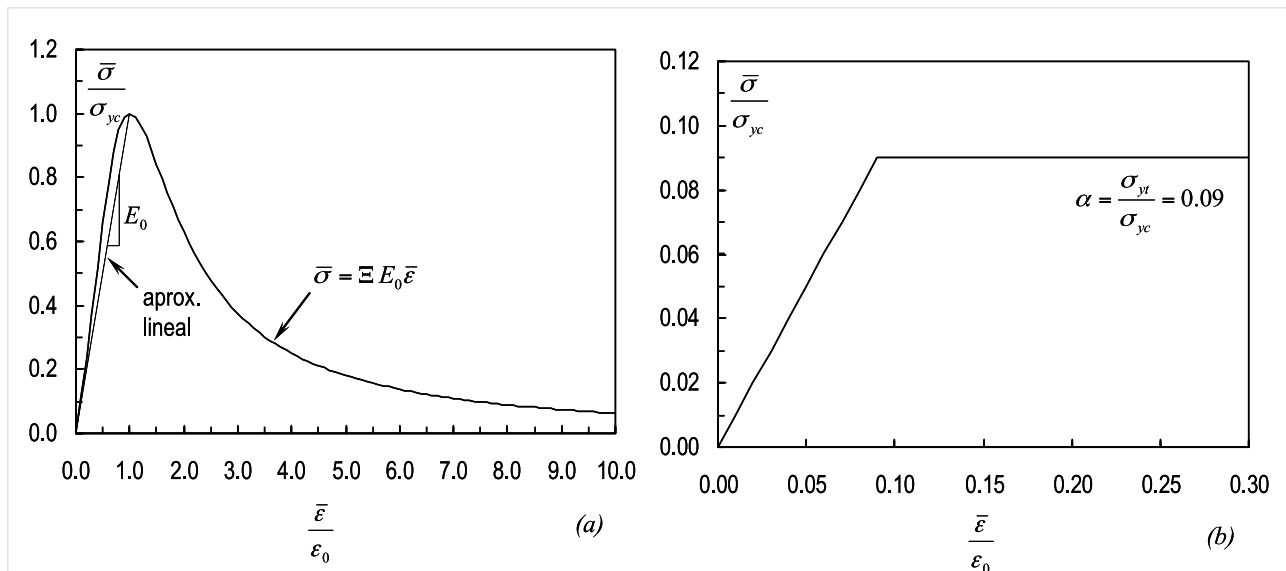


Figura 1. Relación entre el esfuerzo y la deformación uniaxial equivalente: (a) compresión y (b) tracción
Figure 1. Relation between stress and equivalent uniaxial strain: a) compressive stress and b) tensile stress

La función de fluencia en el espacio de los esfuerzos principales $\sigma_1 - \sigma_2$ se representa mediante una superficie de fluencia inicial que encierra los estados de esfuerzo en el rango elástico, la cual se reduce progresivamente con la evolución de la carga en el rango inelástico, como lo indica la **Figura 2**.

The yielding function in the principal stress space $\sigma_1 - \sigma_2$ is represented by an initial yielding surface that holds stress status within the elastic range, which is progressively reduced upon loading evolution within the inelastic range, as indicated on **Figure 2**.

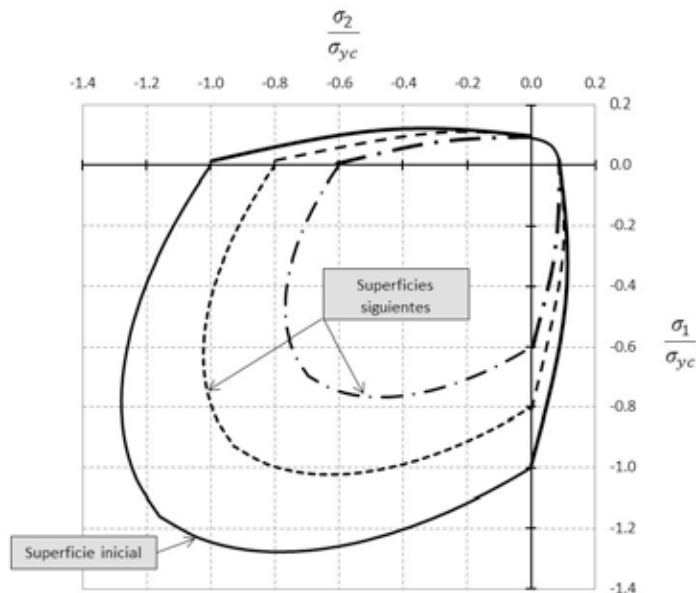


Figura 2. Evolución de la superficie de fluencia del modelo presentado en el espacio de los esfuerzos principales en condición plana de esfuerzos

Figure 2. Evolution of yielding surface of the represented model for the principal stress space under plain stress condition

El módulo de endurecimiento – ablandamiento plástico en compresión H está definido por la variación del esfuerzo uniaxial equivalente con respecto a la deformación plástica equivalente, es decir:

Plastic hardening – softening modulus under compression H is defined by the variation of equivalent uniaxial stress in regards to equivalent plastic strain, so:

$$H(\bar{\varepsilon}^p) = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \quad (13)$$

De acuerdo con la descomposición aditiva de la deformación y con la definición del módulo de elasticidad tangente uniaxial, se tiene que:

In accordance with strain additive decomposition and with the definition of uniaxial tangent elasticity modulus, we obtain:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{d\bar{\sigma}} = \frac{d\bar{\varepsilon}^e}{d\bar{\sigma}} + \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{d\bar{\sigma}} \rightarrow \frac{1}{E_t} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{H} \rightarrow H(\bar{\varepsilon}^p) = \frac{E_0 E_t(\bar{\varepsilon}^p)}{E_0 - E_t(\bar{\varepsilon}^p)} \quad (14)$$

Las condiciones de carga y descarga establecen que para un estado de carga plástica, si $\gamma > 0$ entonces $\gamma f > 0$ para $f = 0$, y en consecuencia $\dot{f} = 0$.

Loading and unloading conditions established for a plastic loading status: if $\gamma > 0$ then $\gamma f > 0$ for $f = 0$, consequently $\dot{f} = 0$.

A partir de la relación entre los tensores de esfuerzo y de deformación elástica se puede definir la siguiente ecuación constitutiva secante:

Based on the relation between tensile stress and elastic strain, the following secant constitutive equation can be defined:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (15)$$

donde \mathbf{C} es el tensor constitutivo elástico del material.

Where \mathbf{C} is the material elastic constitutive tensor

Después de derivar la función de fluencia en el tiempo y de realizar los reemplazos correspondientes se obtiene el *multiplicador plástico* y la *ecuación constitutiva tangente* de la forma:

$$\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma} : \mathbf{C}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \frac{\partial G}{\partial \sigma} + H} > 0 \quad (16)$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}^{\text{tan}} : \dot{\varepsilon} \quad \text{siendo} \quad \mathbf{C}^{\text{tan}} = \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \frac{\partial G}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \mathbf{C}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \frac{\partial G}{\partial \sigma} + H} \quad \text{si } \gamma > 0 \quad \wedge \quad \mathbf{C}^{\text{tan}} = \mathbf{C} \quad \text{si } \gamma = 0 \quad (17)$$

donde \mathbf{C}^{tan} y \mathbf{C} son los tensores constitutivos elástico y tangente, respectivamente. Se puede observar que el tensor \mathbf{C}^{tan} es simétrico si la función G es igual o proporcional a la función F , lo cual se denomina modelo con regla de flujo asociada.

El modelo presentado tiene una regla de flujo no asociada, es decir, la función de potencial plástico es diferente a la función de fluencia y en consecuencia $\mathbf{g} \neq \mathbf{f}$ y $G \neq F$. La función de potencial seleccionada corresponde a la función de fluencia de von Mises en condición plana de esfuerzos, escrita como:

$$g(\sigma, \bar{\sigma}) = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} - \bar{\sigma} = 0 \quad , \quad G(\sigma) = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (18)$$

Al utilizar una regla de flujo no asociada no se satisfacen los postulados de Drucker (Drucker 1950, Drucker 1951) sobre estabilidad local del material, sin embargo tales condiciones no son estrictamente necesarias (Mroz 1963) y si permiten obtener resultados derivados de los ensayos experimentales.

Como lo indica la Ecuación (17), el tensor constitutivo tangente \mathbf{C}^{tan} depende, entre otros, de dos tensores de segundo orden resultantes de la derivada parcial de función de potencial plástico G y de la función de fluencia F con respecto al tensor de esfuerzos. A partir la función de potencial plástico de la Ecuación (18), se calcularon las componentes del tensor $\partial G / \partial \sigma$ en función de los esfuerzos principales σ_1, σ_2 . De igual forma, dada la función de fluencia para estados de esfuerzo de tracción biaxial, tracción – compresión y compresión biaxial, expresada en las ecuaciones (5), (7) y (8), respectivamente, se obtuvieron las componentes del tensor $\partial F / \partial \sigma$ en términos de σ_1, σ_2 (Rodríguez-Fajardo 2011).

3. Implementación del modelo numérico en el método de los elementos finitos

En este trabajo se incluyeron las subrutinas de un nuevo modelo constitutivo de material al código del programa de análisis no lineal por elementos finitos HYPLAS (de Souza Neto et al., 2008), siguiendo un esquema de integración implícito.

After differentiating the yielding function throughout time and conducting the corresponding replacements, the plastic multiplier and the tangent constitutive equation are obtained, as follows:

Where \mathbf{C}^{tan} and \mathbf{C} are the elastic constitutive tensors and the tangent, respectively. It can be observed that tensor \mathbf{C}^{tan} is a symmetrical tensor provided that the G function is equal or proportional to F function, which is called associated flow rule model.

The introduced model has a non associated flow rule, that it to say, the plastic potential function is different to the yielding function, consequently $\mathbf{g} \neq \mathbf{f}$ and $G \neq F$. The chosen potential function corresponds to a von Mises function under stress plain condition, described as follows:

When employing a non associated flow rule, principles proposed by Drucker (Drucker 1950, Drucker 1951) are not fulfilled in regards to local material stability. However, such conditions are not strictly required (Mroz 1963) and they do allow us to obtain results derived from experimental tests.

As indicated by Equation (17), the tangent constitutive tensor \mathbf{C}^{tan} depends, among others, on two second order tensors, which are the result of the partial derivative of a plastic potential function G and from a yielding function F in regards to tensile stress. From plastic potential function on Equation (18), the tensor components $\partial G / \partial \sigma$ were calculated in function of principal stress σ_1, σ_2 . Based on the yielding function for stress states of stress states of biaxial tension, tension - compression and biaxial compression, expressed on equations (5), (7) and (8), respectively, the tensor components $\partial F / \partial \sigma$ were obtained in terms of σ_1, σ_2 (Rodríguez-Fajardo 2011).

3. Implementation of numerical model on the finite elements method

This research incorporates the sub-routines of a new material constitutive model to the program code of on non linear analysis program by finite elements HYPLAS (de Souza Neto et al., 2008), by following an implicit integration scheme.



La solución numérica implementada considera estado plano de esfuerzos, deformaciones infinitesimales y cargas estáticas.

Dadas las componentes de deformación y las variables internas en un punto de integración en el interior de un elemento finito, una de las subrutinas del modelo constitutivo calcula las componentes de esfuerzo y otra obtiene los coeficientes del tensor constitutivo tangente en notación de Voigt.

4. Validación del modelo mediante la simulación numérica del ensayo de paneles de concreto

Kupfer y otros (Kupfer et al., 1969) ensayaron un grupo de paneles cuadrados de concreto simple de 0.20m de lado y 0.05m de espesor, sometidos a diferentes estados de carga distribuida paralela a su plano como lo indica la Figura 3. El concreto tiene las siguientes propiedades: módulo de Young $E_c = 20.97 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$, relación de Poisson $\nu = 0.20$, esfuerzo máximo a compresión $\sigma_{yc} = 28.98 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$ y una relación entre esfuerzos máximos de tracción y compresión $\alpha = \sigma_{yt} / \sigma_{yc} = 0.09$. Algunos de estos ensayos fueron simulados con el modelo numérico propuesto.

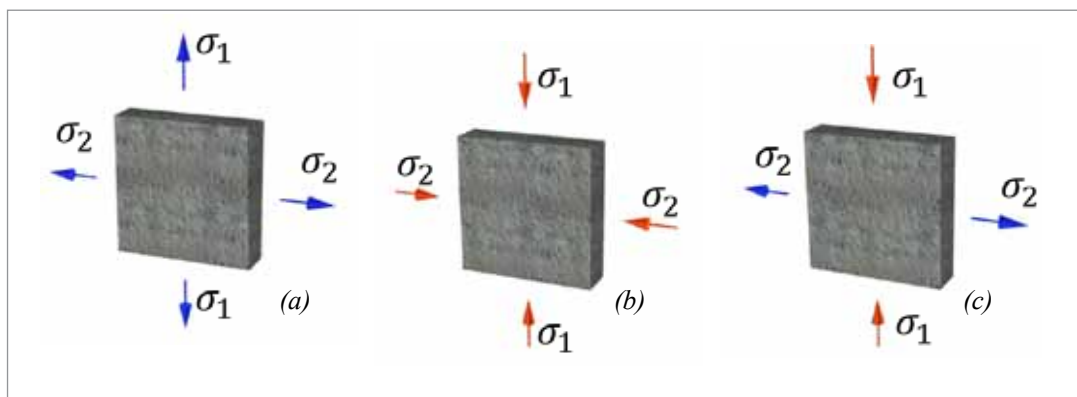


Figura 3. Paneles de concreto simple sometidos a: (a) tracción biaxial, (b) compresión biaxial y (c) tracción – compresión
Figure 3. Simple concrete panels subject to: (a) biaxial tensile stress, (b) biaxial compressive stress and (c) tensile – compressive stress

Las cargas aplicadas producen una distribución homogénea del campo del esfuerzo sobre el panel. Por esta razón se simuló el problema con una malla de un elemento finito cuadrilateral lineal de 4 nudos, en el cual se restringe el desplazamiento en la dirección x en la cara izquierda y el desplazamiento en dirección y sobre la cara inferior, como lo indica la Figura 4.

A cambio de presiones sobre las caras del elemento, se aplican desplazamientos iguales en cada dirección con el fin de evitar dificultades en la convergencia de la solución numérica cuando la respuesta estructural exhibe ablandamiento. Los desplazamientos se imponen en la misma dirección y proporción que tienen los esfuerzos en una cara con respecto a la cara adyacente. Los apoyos se ubican en los nudos y se disponen de manera tal que permiten la libre expansión o contracción del elemento.

The implemented numeric solution considers a plain stress condition, infinitesimal strain and static loads.

Based on strain components and internal variables at an integration point of finite elements, a sub-routine of the constitutive model calculates the stress components and another obtains the tangent constitutive tensor coefficients on Voigt notation.

4. Model validation by means of numerical simulation on concrete panels test.

Kupfer and others (Kupfer et al., 1969) tested a set of simple concrete square panels of 0.20 m width and 0.05m thickness, subject to different distributed load status which is parallel to their plane, as indicated on **Figure 3**. Concrete has the following features: Young modulus $E_c = 20.97 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$, Poisson relation $\nu = 0.20$, maximum compressive stress $\sigma_{yc} = 28.98 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$ and a relation between maximum tensile and compressive stress $\alpha = \sigma_{yt} / \sigma_{yc} = 0.09$. Some of these tests were simulated by the proposed numerical model.

Loads applied produce a homogeneous distribution of the stress field on the panel. Consequently, the problem was simulated with a mesh of a quadrilateral linear finite element of 4 nodes. The displacement in x direction on the left face and the displacement in y direction on the lower face are restrained, as indicated on Figure 4.

When changing pressure loads on the element faces, equal displacements are applied in each direction, in order to avoid convergence difficulties on the numeric solution when there is softening as structural response. Displacements are applied in the same direction and proportion as the loads endured by one face, with regards to the adjacent face. Supports are located on the nodes and they are allocated in such a way the element expansion or contraction is freely allowed.

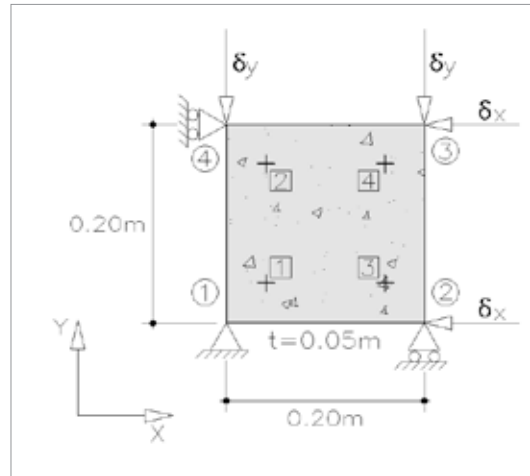


Figura 4. Malla de un elemento finito cuadrilátero lineal, condiciones de contorno y acciones aplicadas
Figure 4. Linear quadrilateral finite element mesh, contour conditions and applied actions

Los desplazamientos son aplicados gradualmente en pequeños incrementos simulando la carga gradual de los ensayos de laboratorio.

La simulación numérica de los diferentes ensayos experimentales se realizó con la misma malla, modificando solamente los desplazamientos impuestos. La relación entre el desplazamiento aplicado verticalmente en los nudos 3 ó 4 con respecto al desplazamiento horizontal aplicado en los nudos 2 ó 3, determinará el estado de esfuerzos en cada ensayo.

La **Tabla 1** indica los ensayos experimentales que fueron simulados con el modelo numérico propuesto.

Displacements are gradually applied in small increments by simulating gradual load of laboratory tests.

The numerical simulation on different experimental tests was conducted by using the same mesh, only modifying the applied displacements. The relationship between displacement applied vertically on nodes 3 or 4, in regards to applied horizontal displacements on nodes 2 or 3, will determine the stress status in each test.

Table 1 indicates experimental tests that were simulated by using the proposed numeric model.

Tabla 1. Ensayos experimentales que fueron simulados con el modelo propuesto

Table 1. Experimental tests that were simulated by using the proposed numeric model

Referencia/Reference	Estado de esfuerzo/Stress status	$\delta_y / \delta_x = \delta_1 / \delta_2$
S-1	Compresión biaxial/Biaxial compression	-1.00 / -1.00
S-2	Compresión biaxial/ Biaxial compression	-1.00 / -0.52
S-3	Tracción - Compresión/Tensile - compression	-1.00 / -0.052
S-4	Tracción biaxial/ Biaxial tensile	+1.00 / +1.00

La Figura 5(a) indica la relación entre el esfuerzo normal y la deformación longitudinal en dirección y cuando se aplican desplazamientos iguales que generan compresión en las direcciones x y y . Los resultados numéricos muestran una relación lineal hasta el 80% aproximadamente del esfuerzo máximo de compresión. A partir de este nivel de esfuerzos comienza un comportamiento no lineal dividido en una rama ascendente hasta $1.2\sigma_{yc}$ y otra descendente que representa el ablandamiento por deformación. Se observa que el resultado numérico coincide aproximadamente con el resultado experimental de Kupfer y otros (Kupfer et al., 1969).

Figure 5(a) indicates the relation between regular stress and longitudinal strain in direction y , when equal displacements that generate compression in directions x and y are applied. Numerical results show a linear relation of approximately 80% of the maximum compressive stress. From this stress range, a non linear behavior takes place, which is divided into an ascendant branch up to $1.2\sigma_{yc}$ and other descendant branch that represent softening caused by strain. The numerical result approximately matches the experimental result developed by Kupfer and others (Kupfer et al., 1969).

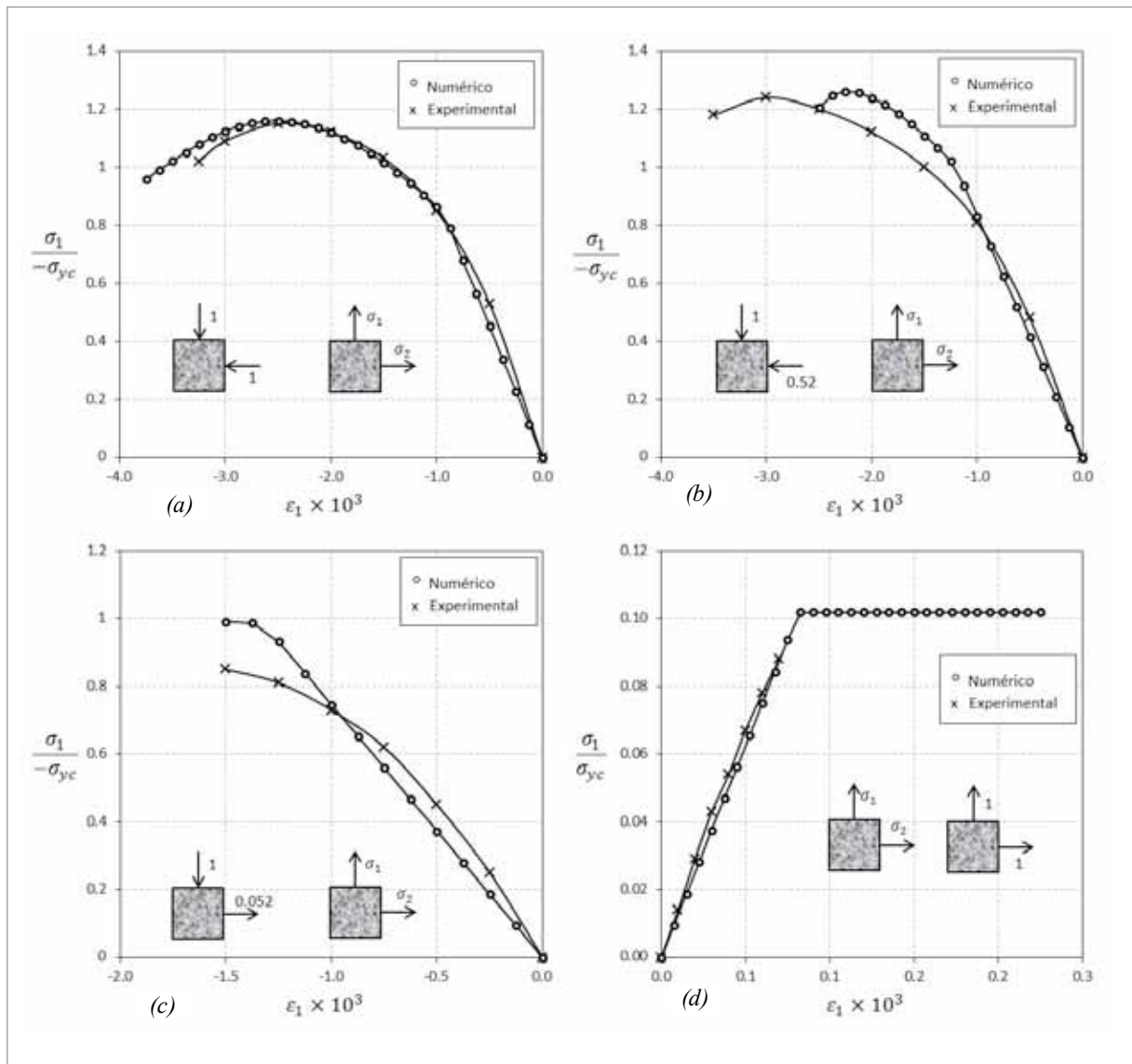


Figura 5. Relación entre esfuerzo normal y la deformación longitudinal en dirección 1 para diferentes estados de esfuerzos: (a) compresión biaxial -1.00/-1.00, (b) compresión biaxial -1.00/-0.52, (c) tracción – compresión -1.00/+0.052 y (d) tracción biaxial +1.00/+1.00

Figure 5. Relation between regular stress and longitudinal strain in direction 1, for different stress status (a) biaxial compression -1.00/-1.00, (b) biaxial compression -1.00/-0.52, (c) tension – compression -1.00/+0.052 and (d) biaxial tension +1.00/+1.00.

En la Figura 5 (b) se indica la relación $\sigma_1/\sigma_{yc} - \epsilon_1$ para un panel sometido a desplazamientos que generan compresión uniforme en dirección x 0.52 veces la compresión uniforme en y . Se observa un comportamiento lineal inicial similar al experimental y una respuesta más rígida del modelo numérico en la rama no lineal, sin embargo el esfuerzo máximo es aproximadamente igual al obtenido experimentalmente.

En la Figura 5 (c) se presenta la relación $\sigma_1/\sigma_{yc} - \epsilon_1$ para un panel sometido a desplazamientos que generan compresión uniforme en dirección x 0.052 veces la tracción uniforme en y . La relación lineal inicial de la curva del modelo numérico es diferente al comportamiento experimental. El esfuerzo máximo obtenido de la modelación y de la experimentación difiere en un 20%, debido entre otros factores, a que no están teniendo en cuenta fenómenos de fractura.

Figure 5(b) shows the relation $\sigma_1/\sigma_{yc} - \epsilon_1$ for a panel subject to displacements that generate uniform compression in direction x , 0.52 times higher than the uniform compression in direction y . An initial linear behavior similar to the experimental one is observed, as well as a stiffer response from the numerical model in the non linear branch. However, the maximum stress is approximately equal to the experimental one.

Figure 5(c) presents the relation $\sigma_1/\sigma_{yc} - \epsilon_1$ for a panel subject to displacements that generate uniform compression in direction x , 0.052 times higher than uniform tensile stress in direction y . The initial linear relationship in the numerical model curve is different to the experimental behavior. The maximum stress obtained from the modeling and the experiment differs in 20% due to the fact that fracture phenomena are not taken into account, among other factors.

De la modelación numérica de un panel sometido a tracción biaxial uniforme y de igual magnitud se indica lo siguiente. El resultado obtenido del modelo es aproximadamente igual al resultado experimental como lo muestra la Figura 5(d). El modelo constitutivo supone un comportamiento plástico perfecto después de alcanzado el esfuerzo máximo a tracción, por esta razón se tiene una respuesta estructural hasta un nivel de deformación más alto comparado con el resultado experimental.

5. Aplicación del modelo en vigas a flexión

Una viga de longitud de 3.00m y una sección transversal rectangular de 0.25m de base por 0.50m de alto, está sometida a una carga en el extremo derecho. El material de la viga se representa con el modelo constitutivo introducido y tiene las siguientes propiedades mecánicas: módulo de Young $E_c = 36 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$, relación de Poisson $\nu=0.19$, esfuerzo máximo a compresión $\sigma_{yc} = 23950 \text{ kN/m}^2$ y relación entre el esfuerzo máximo a tracción y a compresión $\alpha = 0.09$.

El problema se simplifica a un estado plano de esfuerzos utilizando una malla de 24 elementos finitos cuadrilaterales lineales, como se ilustra en la Figura 6.

From numerical modeling of a panel subject to uniform biaxial tensile stress of the same magnitude, the following can be stated. The result obtained from the model is approximately the same as the experimental one, as shown on Figure 5(d). The constitutive model assumes a perfect plastic behavior after reaching the maximum tensile stress; that is why a structural response is obtained up to a higher strain level compared to the experimental result.

5. Application of the model on bending beams

A beam of length 3.00m and rectangular cross section of 0.25m base per 0.50m height are subject to a load on the right end. The material beam is represented by the introduced constitutive model and its mechanical properties are the following: Young module $E_c = 36 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$, Poisson relation $\nu=0.19$, maximum compressive stress $\sigma_{yc} = 23950 \text{ kN/m}^2$, and relation between maximum tensile and compressive stress $\alpha = 0.09$.

The problem is simplified to a stress plane status by using a mesh of 24 linear quadrilateral finite elements, as shown on Figure 6.

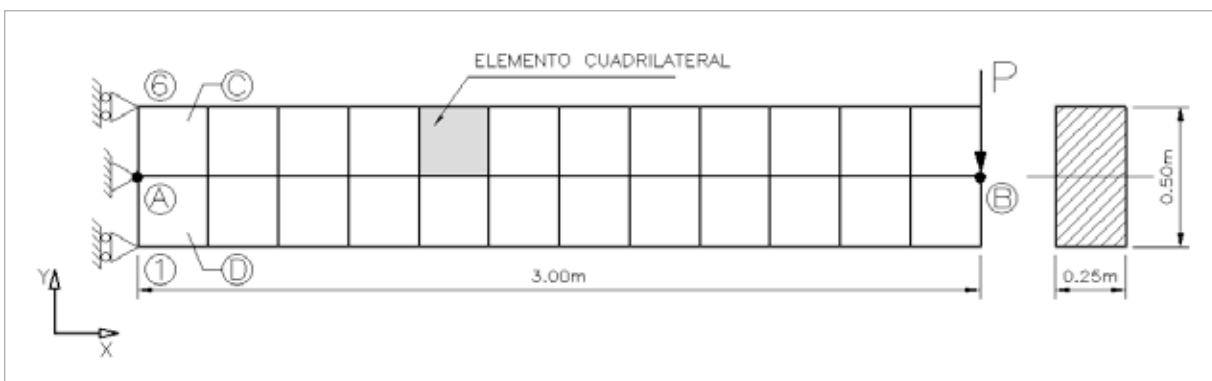


Figura 6. Viga en voladizo sometida a una carga puntual. Malla de elementos finitos

Figure 6. Cantilever beam subject to point load. Finite elements mat

La carga en el extremo de la viga P evoluciona desde un valor inicial de cero como se indica en la Figura 7. Primero la carga se aplica en dirección y negativa superando la deformación de fluencia en el sector con mayor momento (fibras del extremo superior próximas al apoyo). Posteriormente la carga disminuye hasta invertir el sentido y causar deformación de fluencia nuevamente (ahora en las fibras inferiores próximas al apoyo). Finalmente la carga disminuye a cero.

The load on the beam in end P evolves from an initial zero value, as indicated on Figure 7. First the load is applied in negative direction and exceeding the yielding strain at the higher moment sector (Top end fibers located next to the support). Afterwards load decreases until reversing way and to cause yielding strain once again now (for bottom fibers next to the support). Finally load decreases to zero.

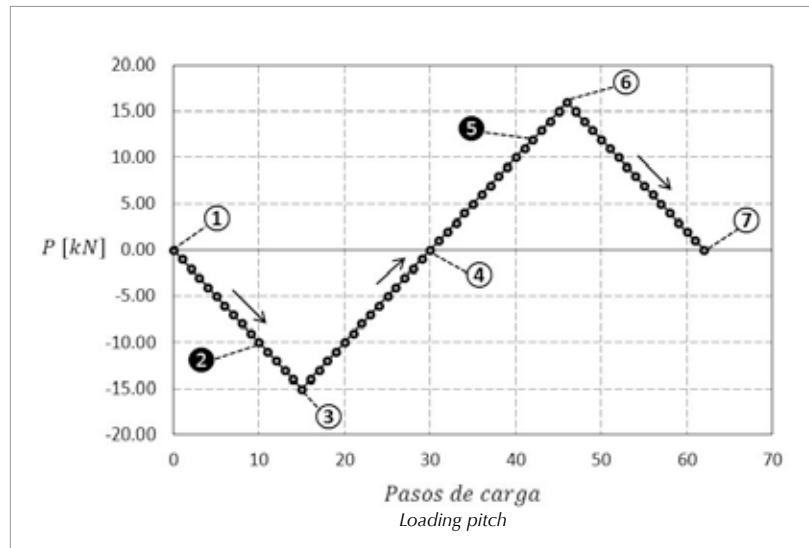


Figura 7. Viga en voladizo sometida a una carga puntual. Historia de la carga
Figure 7. cantilever beam subject to point load. Loading history

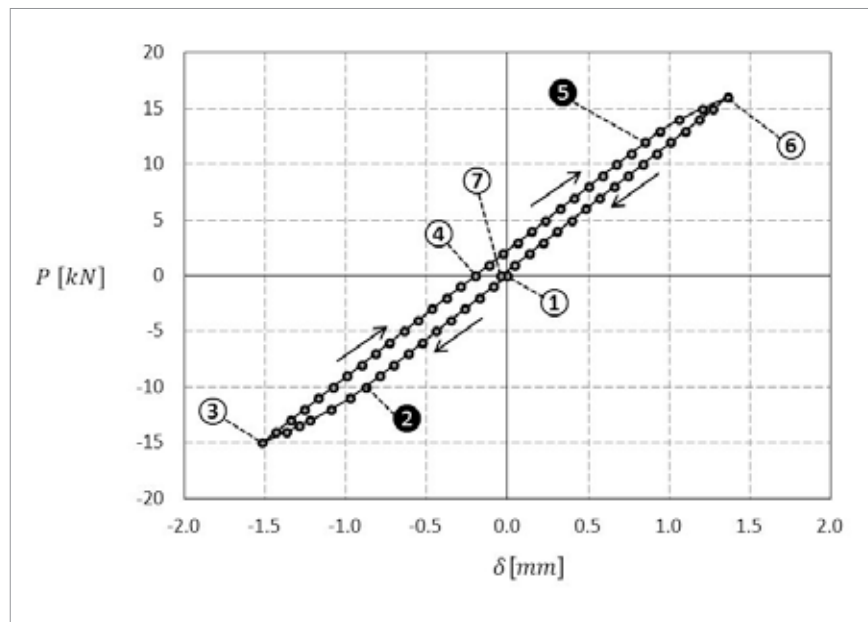


Figura 8. Viga en voladizo sometida a una carga puntual. Relación entre la carga puntual aplicada y el desplazamiento vertical en el extremo derecho.

Figure 8. Cantilever beam subject to point load. Relationship between applied load point and vertical displacement on the right end

La Figura 8 ilustra la relación entre la carga puntual aplicada y el desplazamiento vertical en el extremo derecho de la viga. Los puntos resaltados con los numerales 1 al 7 en la curva, hacen referencia a pasos de carga representativos. En el intervalo delimitado por los instantes 1 y 2, el comportamiento de todos puntos material de viga es elástico lineal. Superado el instante 2 se presenta fluencia por tensión en las fibras superiores cercanas al empotramiento. En el intervalo de 2 a 3 la carga continúa aumentando en un proceso de carga plástica.

Figure 8 depicts the relationship between applied load point and vertical displacement on the right end. Highlighted dots in the curve from numbers 1 to 7 refer to representative loading steps. In the interval delimited by instants 1 and 2, the behavior of all beam material points is a linear elastic. Once instant 2 is exceeded, tensile yielding takes place on fibers close to the fixed support. In the interval 2 up to 3, load keeps increasing under a plastic loading process.

Posteriormente se realiza una descarga elástica en el intervalo delimitado entre los puntos 3 y 4. Esta descarga muestra la misma pendiente de la carga en rango elástico. En el instante 4 se observa que la carga aplicada es cero pero ha quedado un desplazamiento permanente aproximadamente igual a 0.2mm en el extremo de la viga. Del instante 4 al 5 la carga aumenta en sentido contrario, realizando una recarga en rango elástico. A continuación, entre los puntos 5 y 6 la carga se incrementa aún más, generando un proceso de carga plástica a tracción en las fibras inferiores de la viga, cercanas al empotramiento. Del punto 6 al 7 se descarga elásticamente hasta carga cero. En el instante 7 se observa un desplazamiento permanente en el extremo de la viga.

A pesar del ablandamiento que indica el comportamiento del material después del límite elástico a tracción, la curva carga – desplazamiento exhibe una pendiente positiva en la etapa de carga inelástica. Lo anterior se debe a que la zona de la viga sometida a compresión conserva un comportamiento elástico dado el factor α .

En la Figura 9 se muestra la distribución de la componente de esfuerzo normal en dirección x sobre toda la viga. Se observa una respuesta estructural elástica de la viga entre los pasos 1 y 2, donde los esfuerzos son simétricos respecto al eje neutro localizado en el eje centroidal de la viga. En este intervalo también se observa una distribución de esfuerzos que se incrementa linealmente conforme los puntos se alejan del eje neutro de la viga.

En el paso de carga 3 se presenta deformación de fluencia en tracción en las fibras superiores de la viga cercanas al empotramiento. Debido a las propiedades de ablandamiento del material, el esfuerzo en las zonas donde se presentan deformaciones plásticas disminuye progresivamente. En este paso de carga la distribución de esfuerzos en las secciones cercanas al empotramiento no es lineal y el eje neutro se desplaza hacia abajo para mantener el equilibrio de esfuerzos en cada sección transversal. A pesar del aumento de la carga aplicada, las zonas de la viga sometidas a un esfuerzo a tracción conservan un valor constante después de alcanzado el límite elástico. En consecuencia el eje neutro se desplaza hacia abajo, aumentando el área de la sección transversal sometida a esfuerzos de tracción en la parte superior que equilibran los esfuerzos de compresión en la parte inferior de la sección. Los esfuerzos de compresión aumentan conforme aumenta la carga en el voladizo debido a que el límite elástico en este rango no es superado.

Posteriormente cuando la carga en el extremo libre de la viga cambia de sentido, las fibras sometidas a esfuerzos de tensión son las de la cara inferior de la viga. En el instante de carga 5 mostrado en la Figura 9(c), se observa el cambio en la distribución del esfuerzo durante el proceso de carga plástica.

En el instante 6 se aprecia el mismo efecto descrito para el instante 3. El esfuerzo a tracción en cara inferior cercano al empotramiento decrecen conforme se incrementa la carga en el extremo libre de la viga debido al ablandamiento del material. El eje neutro de la viga ahora se desplaza hacia la parte superior debido a que el esfuerzo normal a tracción se reduce en la parte inferior de la viga cercana al voladizo y por lo tanto se requiere una mayor área de la sección con esfuerzos de tracción en la parte inferior para equilibrar los grandes esfuerzos de compresión que ocurren en la parte superior de la viga.

Afterwards, an elastic unload is applied on the interval delimited between dots 3 and 4. Such unload shows the same loading slope within an elastic range. It is observed that applied load is zero at instant 4; however there is a permanent displacement equal to 0.2mm at the beam end. Load increases in a reverse direction from instants 4 to 5, thus developing a reload within an elastic range. Then load is increased even more between dots 5 and 6, developing a tensile plastic load at the beam bottom fibers which are close to the fixed support. Load is elastically unloaded from dot 6 up to 7 until zero. We can observe a permanent displacement at the beam end at instant 7.

In spite of softening taking place, which indicates material behavior after the elastic tensile limit, the load-displacement curve shows a positive slope within the inelastic load stage. Above is caused because the beam area subject to compression maintains an elastic behavior due to factor α .

Figure 9 shows the distribution of normal stress component in direction x on the whole beam. There is a beam elastic structural response between steps 1 and 2, where stresses are symmetrical in regards to the neutral axis located on the beam centroidal axis. In this interval there is also a stress distribution, which is linearly increased as long as dots move away from the beam neutral axis.

In the load step 3, there is a tensile yielding strain on beam top fibers close to the fixed support. The stress on areas with plastic strain decreases progressively, due to material softening properties. In this loading step, the stress distribution on sections close to the fixed support is no linear and the neutral axis is displaced downwards to maintain the stress balance on each cross section. In spite of the increased applied load, the beam areas subject to a tensile stress maintain a steady constant value after achieving the elastic limit. Consequently, the neutral axis is displaced downwards, thus increasing the transversal section area subject to tensile stress on the upper side, which balances compressive stresses at the bottom side of such section. Compressive stresses rise as long as load is increased on the cantilever, because the elastic limit within this range is not exceeded.

Afterwards, when the end of a free load beam changes direction, the fibers subject to tensile stress correspond to the ones at the beam bottom side. At the load instant 5 showed by Figure 9(c), there is a change of stress distribution during plastic load process.

At instant 6 the same effect as described for instant 3 takes place. The tensile stress on the bottom side close to the fixed support decreases, as long as load is increased on the beam free end due to material softening. The beam neutral axis is now displaced towards the top side, because the regular tensile stress is reduced on the beam bottom side close to the fixed support. Therefore, a greater section area with tensile stresses is required on the bottom side in order to balance great compressive stresses taking place on the beam top side.



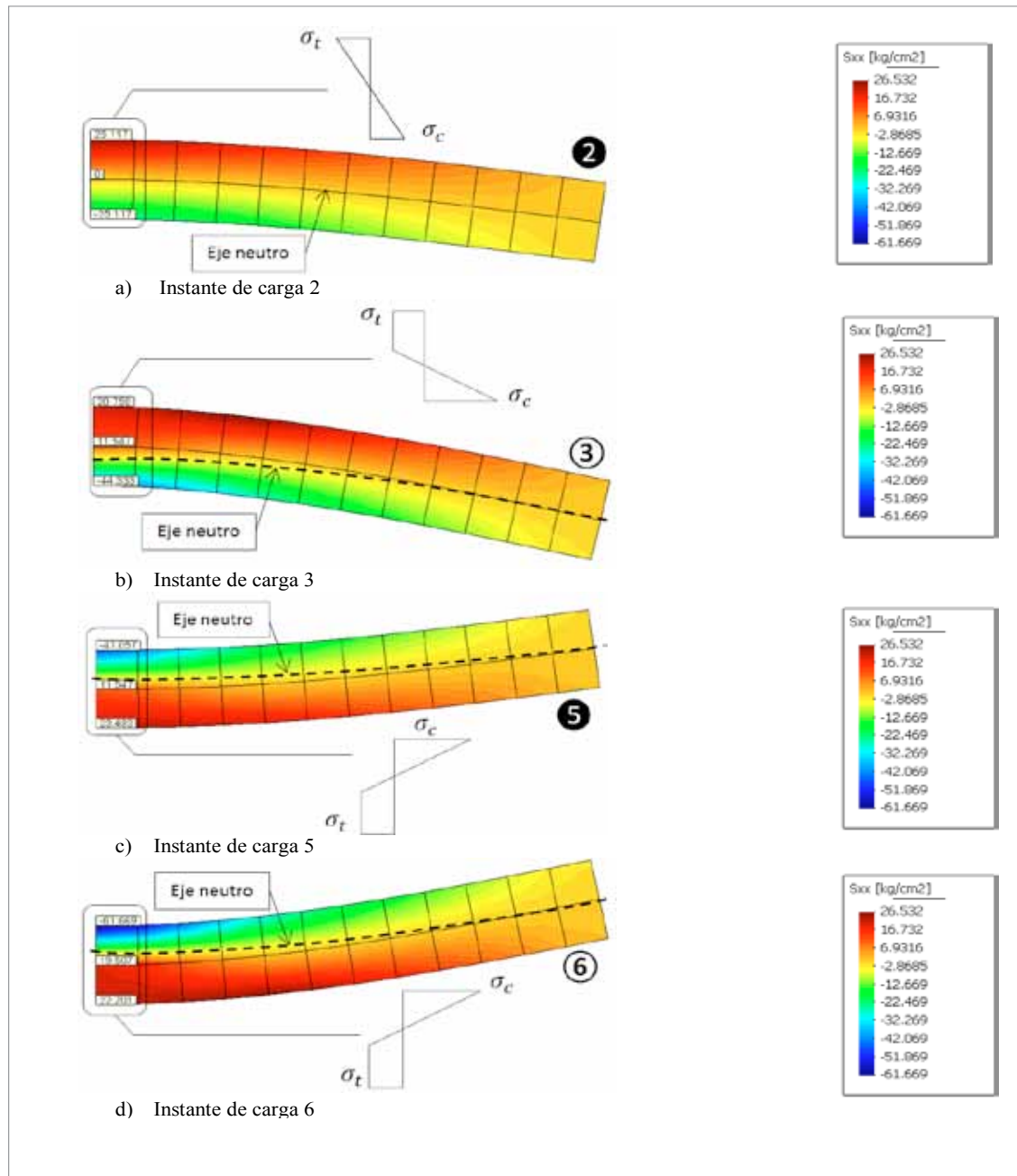


Figura 9. Viga en voladizo sometida a una carga puntual. Distribución de la componente de esfuerzo normal en dirección x para los pasos de carga representativos

Figure 9. Cantilever beam subject to point load. Distribution of normal stress component in direction x for representative loading steps.

6. Conclusiones

Al considerar una relación lineal inicial entre el esfuerzo y la deformación uniaxial equivalente del modelo de Hu y Schnobrich, se simplifica la implementación del modelo propuesto sin que esto signifique un sacrificio en el ajuste de los resultados al ser comparados con datos experimentales.

En este trabajo se formuló e implementó un algoritmo de integración implícito del modelo de Hu y Schnobrich, en el marco del análisis no lineal con elementos finitos, con el cual se satisfacen las condiciones de equilibrio en cada paso de carga.

6. Conclusions

By considering an initial linear relationship between stress and equivalent uniaxial strain on Hu and Schnobrich model, the implementation of the proposed model is simplified without altering the adjustment of results when compared to the experimental data.

This research formulated and implemented an implicit integration algorithm from Hu and Schnobrich model, under the framework of a non linear analysis including finite elements, which the equilibrium conditions in each loading step are fulfill.

Si se establecen incrementos del desplazamiento a cambio de incrementos de carga mediante el método de Newton – Raphson, se logra convergencia numérica con pocas iteraciones en problemas donde el desplazamiento aumenta y la carga aplicada decrece. También se observó que controlando la carga o el desplazamiento utilizando el método de longitud de arco se obtiene convergencia numérica de la solución en pocas iteraciones.

El modelo constitutivo implementado usa una regla de flujo no asociada, que produce tensores constitutivos tangentes no sean simétricos y a su vez también la matriz de rigidez de la estructura no sea simétrica. Lo anterior genera un costo computacional mayor, sin embargo se obtienen resultados más cercanos a los experimentales en comparación con los resultados del modelo con regla de flujo asociada.

De acuerdo con los resultados obtenidos con el modelo implementado, se observa que el mejor ajuste se obtiene para el rango de compresión biaxial y tensión biaxial. Para el rango de tensión – compresión no tiene el mismo nivel de concordancia con los resultados experimentales debido a que el modelo no contempla fenómenos propios del concreto como la fractura.

Para tensión biaxial, el modelo seleccionado, un comportamiento de plasticidad perfecta. Esto con el fin de evitar inestabilidad numérica en la solución, dada cuando decrece rápidamente el esfuerzo con el aumento de la deformación.

El modelo numérico propuesto combina el fundamento matemático de la teoría de la plasticidad con una aproximación empírica de la función de fallo del concreto. Lo anterior conlleva a resultados de la simulación numérica que representan adecuadamente el comportamiento mecánico del concreto, principalmente para estados de esfuerzo de compresión biaxial, en los cuales fenómenos como la fractura no inciden de manera directa en el comportamiento.

7. Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación otorgada por la Dirección de Investigación de la Sede de Bogotá de la Universidad Nacional de Colombia a través del proyecto DIB-8849.

8. Referencias/References

- Babu R., Benipal G. & Singh A. (2005)**, Constitutive modelling of concrete: an overview. Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing), 6, 211-246.
- Bazant Z. & Oh B. (1983)**, Crack band theory for fracture of concrete. Materials and Structures, 16, 155-177.
- CIMNE (2008)**, GiD - The personal pre and post processor, Barcelona, International Center of Numerical Method in Engineering.
- Chen A. C. T. & Chen W. F. (1975)**, Constitutive relations for concrete. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 101, 465-481.
- Chen W. F. & Han D. J. (2007)**, Plasticity for structural engineering, New York, J. Ross.
- De Souza Neto E. A., Peric D. & Owen D. R. J. (2008)**, Computational Methods for Plasticity, West Sussex, Wiley.
- Drucker D. C. (1950)**, Some implications of work hardening and ideal plasticity. Quarterly of Applied Mathematics, 7, 411-418.
- Drucker D. C. (1951)**, A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. First U.S. National Congress of Applied Mechanics. ASME.
- Elwi A. A. & Murray D. W. (1979)**, A 3D Hypoelastic Concrete Constitutive Relationship. ASCE Journal, 105, 623-641.
- Fenestra P. H. & de Borst R. (1996)**, A composite plasticity model for concrete. International Journal of Solids and Structures, 33, 707-730.

If increased displacements are applied instead of increasing loading by means of Newton – Raphson, method numerical convergence will be achieved with few iteration in problems where displacement increases and applied load decreases. It was also observed that by controlling load or displacement, by using the arc length method, a numerical convergence is achieved for the solution with little iterations.

The implemented constitutive model employs a non associated flow rule, which produce tangent constitutive tensors not to be symmetrical. At the same time the structure stiffness matrix is not symmetrical either. Above leads to a higher computational cost, however obtained results are quite close to the experimental ones in comparison to the results achieved by the associate flow rule model.

In accordance with results obtained by the implemented model, it is observed that the best adjustment is achieved within the range of biaxial compressive and biaxial tensile stress. For tensile – compressive range, the model has not the same concordance level that experimental results, since the model does not consider concrete phenomena such as fracture.

For biaxial tension, the selected model assumes, a perfect plasticity behavior. Above in order to avoid the solution numeric instability that takes place when stress quickly decreases as long as strain increases.

The proposed numerical model combines the mathematic principle of plasticity theory using an empirical approximation of concrete yielding function. Above leads to numerical simulation results that properly represent concrete mechanical behavior, mainly for biaxial compressive stress status, where phenomena such as fractures do not directly affect the behavior.

7. Acknowledgements

Authors are thankful for the financing support granted by the Research Directorship of Universidad Nacional de Colombia - Bogotá, by means of project DIB-8849.



- Graffe R. D. & Linero D. L. (2010)**, Simulación numérica del proceso de fractura en modo I de vigas de concreto con trayectoria de fisuración conocida mediante un modelo discreto de fisura cohesiva. *Revista Ingeniería de Construcción*, 25, 399-418.
- Grassl P., Lundgren K. & Gyltoft K. (2002)**, Concrete in compression: A plasticity theory with novel hardening law. *International Journal of Solids and Structures*, 39, 5205-5223.
- Han D. J. & Chen W. F. (1987)**, Constitutive modelling in analysis of concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 113, 577-593.
- Hsieh S. S., Ting E. C. & Chen W. F. (1982)**, A plasticity-fracture model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 113, 577-593.
- Hu H. T. & Schnobrich W. (1989)**, Constitutive Modeling of Concrete by Using Nonassociated Plasticity *Journal of Material of Civil Engineering*, 1.
- Imran I. & Pantazopoulou S. J. (2001)**, Plasticity model for concrete under triaxial compression. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 127, 281-290.
- Kupfer H., Hilsdorf H. K. & Rusch H. (1969)**, Behavior of concrete under biaxial stress. *ACI Journal*, 66, 656-666.
- Linero D. L. & Garzón-Alvarado D. A. (2010)**, Elementos de la mecánica del medio continuo para cuerpos sólidos. Volumen 1: Temas Básicos, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.
- Menetrey P. H. & Willam K. J. (1995)**, Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *ACI Structural Journal*, 92, 311-318.
- Mroz Z. (1963)**, Non-associated Flow Laws in Plasticity. *Journal de Mecanique*, 2, 21-42.
- Ohtami Y. & Chen W. F. (1988)**, Multiple hardening plasticity for concrete materials. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 114, 1890-1910.
- Oñate E., Oller S., Oliver J. & Lubliner J. (1988)**, A constitutive model for cracking of concrete based on the incremental theory of plasticity. *Engineering Computations*, 5, 309-319.
- Ottosen N. S. (1977)**, A failure criterion for concrete. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 103, 527-535.
- Rodríguez-Fajardo L. E. (2011)**, Modelación numérica del concreto simple con elementos finitos usando un modelo constitutivo de Plasticidad. Maestría en Ingeniería - Estructuras, Facultad de Ingeniería. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.
- Simó J. C. & Hughes T. J. R. (1998)**, *Computational Inelasticity*, Stanford, Springer.
- Willam K. J. & Warnke E. P. (1974)**, Constitutive model for triaxial behaviour of concrete. *Concrete Structures Subjected to Triaxial Stress*. Bergamo, Italy, International Association for Bridges and Structural Engineering.